

Effetti delle deformazioni viscose sulla distribuzione delle sollecitazioni



Deformazioni viscosse

Deformazione istantanea

Deformazione differita

Deformazione al tempo t per effetto di una tensione variabile nel tempo

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} [1 + \phi(t, t_0)] + \int_{t_0}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E(\tau)} [1 + \phi(t, \tau)] d\tau$$

Deformazione al tempo t

Effetto del carico iniziale (t_0)

Effetto della variazione del carico

$\phi(t, \tau)$: funzione di viscosità. È la deformazione ritardata al tempo t di una forza applicata al tempo τ e che produce una tensione unitaria

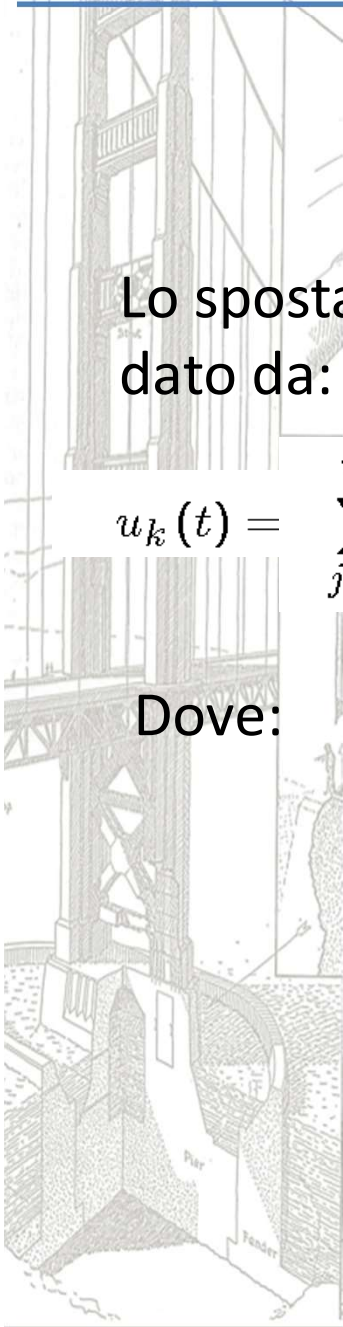
Viscosità lineare

Lo spostamento di un punto P qualsiasi della struttura è allora dato da:

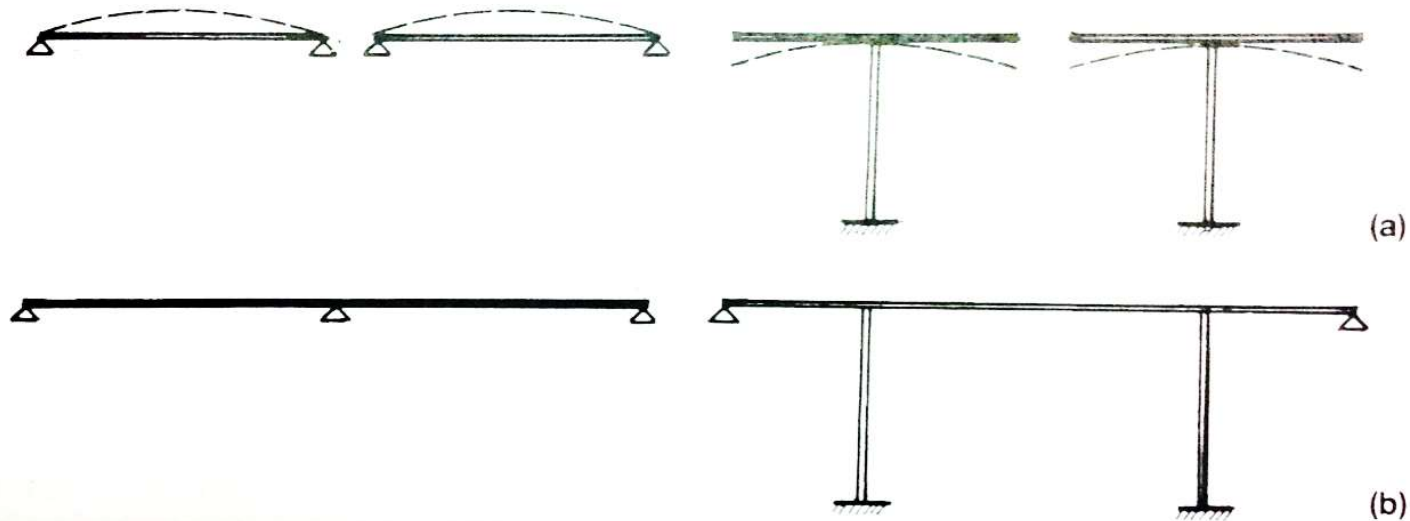
$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n_f} \left\{ W_{kj}(t_{0j}) F_j(t_{0j}) [1 + \phi(t, t_{0j})] + \int_{t_{0j}}^t W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau \right\}$$

Dove:

- $W_{kj}(t)$ è la deformazione nel punto k per un carico unitario applicato nel punto j al tempo t (la dipendenza dal tempo è dovuta a E)
- $F_j(t)$ è la forza applicata nel punto j al tempo t



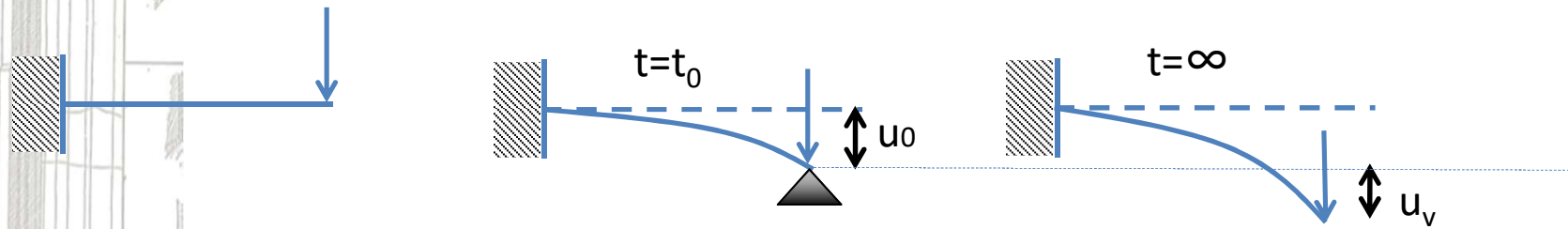
Il comportamento delle strutture nel tempo



Le deformazioni viscosi generano in strutture isostatiche o iperstatiche soltanto variazioni di spostamento a patto che non ci siano variazioni di configurazione strutturale come ad esempio l'aggiunta di un vincolo. In questo ultimo caso oltre a variazioni dello stato deformativo conseguente la viscosità sussiste anche una variazione dello stato tensionale. Tipici esempi, illustrati il figura, riguardano i ponti che a causa della tecnica costruttiva adottata variano la loro configurazione strutturale.

Il comportamento delle strutture nel tempo

Immaginiamo quindi di avere una struttura (la mensola di figura) che ad un certo istante t_0 cambi vincoli e diventi an trave incastro-appoggio



Lo spostamento che si sarebbe avuto in assenza di vincolo vale evidentemente:

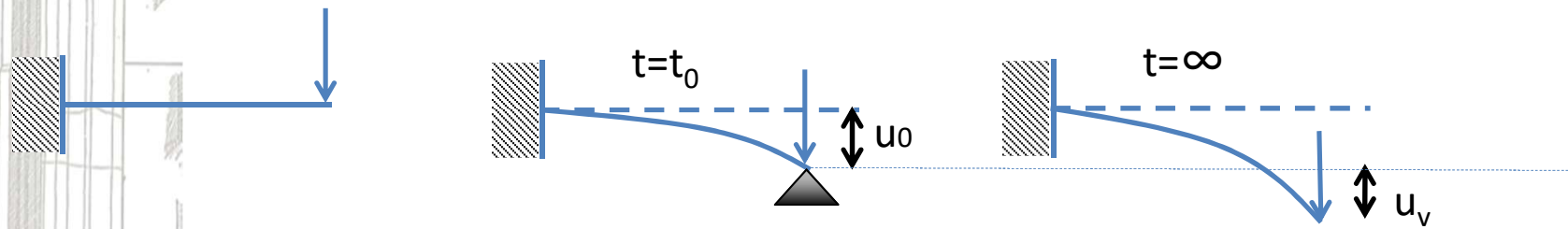
$$u_v(t_0, \infty) = u_0 \phi(t_0, \infty)$$

Lo forza che nascerebbe qualora il vincolo fosse stato presente fin dall'inizio è legata allo spostamento u_0 dalla relazione

$$u_0 = f_0 u'$$

Il comportamento delle strutture nel tempo

Immaginiamo quindi di avere una struttura (la mensola di figura) che ad un certo istante t_0 cambi vincoli e diventi an trave incastro-appoggio



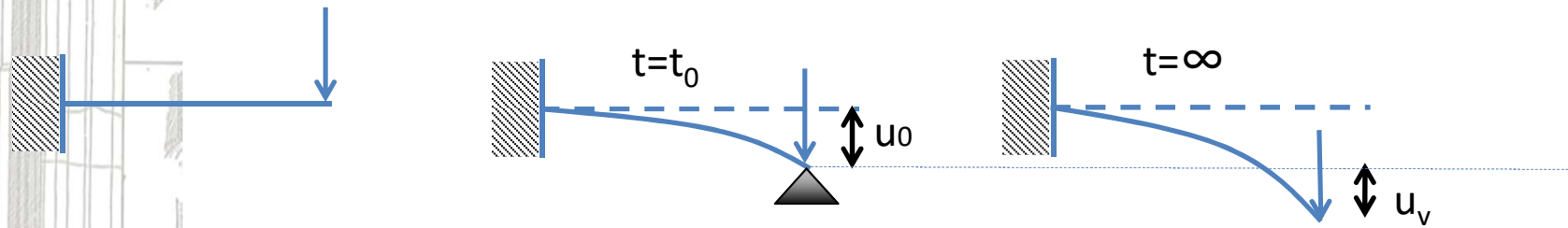
Poiché il vincolo è applicato a tempo t_0 in esso nasce una forza variabile nel tempo che a tempo infinito deve soddisfare la relazione seguente:

$$u_v(t_0, \infty) = u_0 \phi(t_0, \infty) = f_\infty u' \left[1 + \chi(\infty) \phi(t_0, \infty) \right]$$

Infatti, f_∞ è la forza che nascerebbe qualora si facesse sviluppare lo spostamento u_0 senza vincoli e poi si riportasse l'estremità della mensola nella sua posizione originaria. Poiché invece il vincolo è applicato a tempo t_0 la forza varia nel tempo e interviene quindi la viscosità con carico variabile.

Il comportamento delle strutture nel tempo

Immaginiamo quindi di avere una struttura (la mensola di figura) che ad un certo istante t_0 cambi vincoli e diventi an trave incastro-appoggio



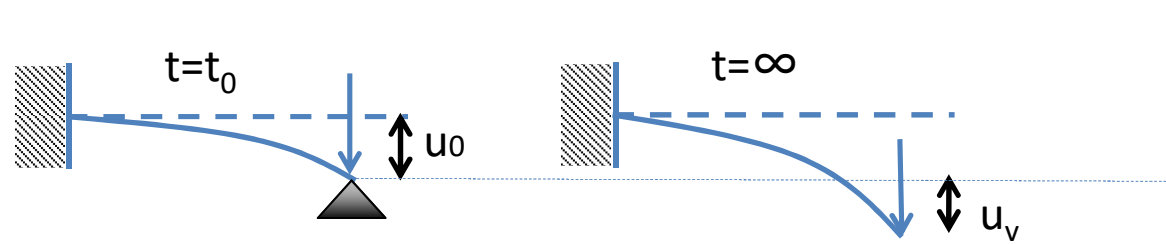
Sostituendo l'espressione di u_0 nella precedente si ottiene:

$$f_0 \phi(t_0, \infty) = f_\infty \left[1 + \chi(\infty) \phi(t_0, \infty) \right] \quad f_\infty = f_0 \left[\frac{\phi(t_0, \infty)}{1 + \chi(\infty) \phi(t_0, \infty)} \right]$$

Ad esempio, se $\phi=2$ e se $\chi=0.8$ il rapporto di tali forze è pari 0.77.

Il comportamento delle strutture nel tempo

Immaginiamo quindi di avere una struttura (la mensola di figura) che ad un certo istante t_0 cambi vincoli e diventi an trave incastro-appoggio



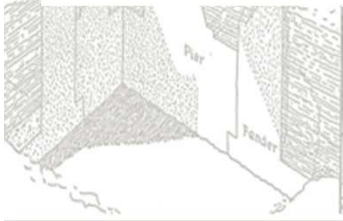
Per il calcolo dell'andamento della forza nel tempo occorre seguire passo dopo passo lo sviluppo delle deformazioni e in genere questo comporta l'utilizzo di procedure numeriche adeguate

Strutture con schema statico variato mediante l'inserimento dei vincoli

Supponendo che al tempo t_v siano inseriti dei vincoli che impediscono i successivi spostamenti, indicando con \mathbb{V} l'insieme dei nodi vincolati, si avrà, per $t > t_v$

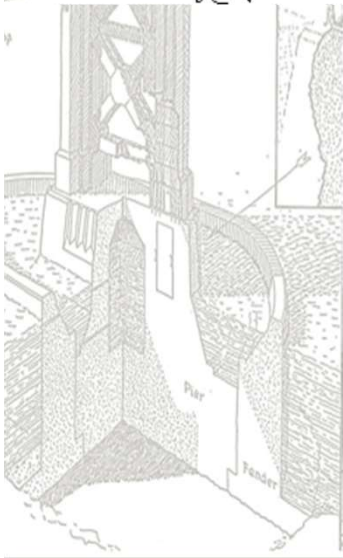
$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n_f} \left\{ W_{kj}(t_{0j}) F_j(t_{0j}) [1 + \phi(t, t_{0j})] + \int_{t_{0j}}^t W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau \right\} + \sum_{i \in \mathbb{V}} \int_{t_v}^t W_{ki}(\tau) \dot{R}_i(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau = u_k(t_v) \quad \forall k \in \mathbb{V} \quad (3)$$

dove $R_i(t)$ indica la reazione del vincolo i al tempo t . La (3) è un'equazione integrale del tipo di Volterra, le cui incognite sono le reazioni R_i .



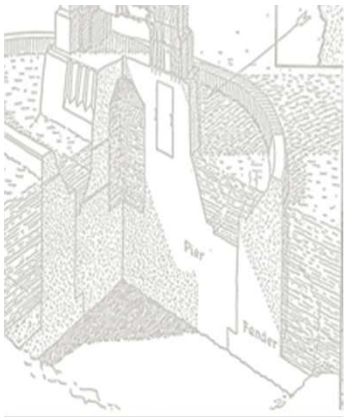
Poiché il vincolo blocca lo spostamento, gli incrementi di u_k dopo il tempo t_v sono nulli:

$$\begin{aligned} \Delta u_k(t) = u_k(t) - u_k(t_v) = & \sum_{j=1}^{n_f} \left\{ W_{kj}(t_{0j}) F_j(t_{0j}) [\phi(t, t_{0j}) - \phi(t_v, t_{0j})] + \right. \\ & \left. + \int_{t_v}^t W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau + \int_{t_{0j}}^{t_v} W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [\phi(t, \tau) - \phi(t_v, \tau)] d\tau \right\} + \\ & + \sum_{i \in \mathbb{V}} \int_{t_v}^t W_{ki}(\tau) \dot{R}_i(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau = 0 \quad t_{0j} < t_v, \forall j, \quad \forall k \in \mathbb{V} \quad (4) \end{aligned}$$



Per risolvere numericamente questa equazione si trasforma l'ultimo integrale in una sommatoria, dopo aver diviso l'intervallo di tempo $[t_v, t]$ in n sottointervalli t_0, t_1, \dots, t_n con $t_0 = t_v$. Indicando con $\Delta R(t_h)$ la variazione di R nell'intervallo $[t_{h-1}, t_h]$, si ha, per ogni $0 < l \leq n$

$$\begin{aligned} \Delta u_k(t_l) \approx & \sum_{j=1}^{n_f} \left\{ W_{kj}(t_{0j}) F_j(t_{0j}) [\phi(t_l, t_{0j}) - \phi(t_v, t_{0j})] + \right. \\ & \left. + \int_{t_v}^t W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau + \int_{t_{0j}}^{t_v} W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [\phi(t, \tau) - \phi(t_v, \tau)] d\tau \right\} + \\ & + \sum_{i \in \mathbb{V}} \sum_{h=0}^l W_{ki}(t_h) \Delta R_i(t_h) [1 + \phi(t_l, t_h)] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{V} \quad (5) \end{aligned}$$



Tenendo conto che $\Delta R_i(t_0) = 0$, per ogni $l > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta u_k(t_l) = & \sum_{i \in \mathbb{V}} W_{ki}(t_l) \Delta R_i(t_l) = \\ & - \sum_{j=1}^{n_f} \left\{ W_{kj}(t_{0j}) F_j(t_{0j}) [\phi(t_l, t_{0j}) - \phi(t_v, t_{0j})] + \right. \\ & \left. + \int_{t_v}^t W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [1 + \phi(t, \tau)] d\tau + \int_{t_{0j}}^{t_v} W_{kj}(\tau) \dot{F}_j(\tau) [\phi(t, \tau) - \phi(t_v, \tau)] d\tau \right\} - \\ & - \sum_{i \in \mathbb{V}} \sum_{h=0}^{l-1} W_{ki}(t_h) \Delta R_i(t_h) [1 + \phi(t_l, t_h)] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{V} \quad (6) \end{aligned}$$

in quanto $\phi(t_l, t_l) = 0$.

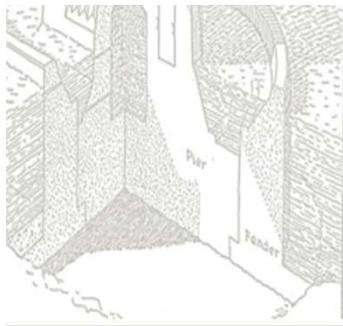


Partendo da $l = 1$, per ogni l la (6) è un sistema di equazioni lineari la cui soluzione fornisce le variazioni $\Delta R_i(t_l)$, quando siano note quelle relative agli istanti $t_h < t_l$.

Come caso particolare ma frequente che le forze F_j non variano nel tempo, l'integrale nella (6) si annulla, e si ottiene, più semplicemente (per $t_{0j} < t_v, \forall j$):

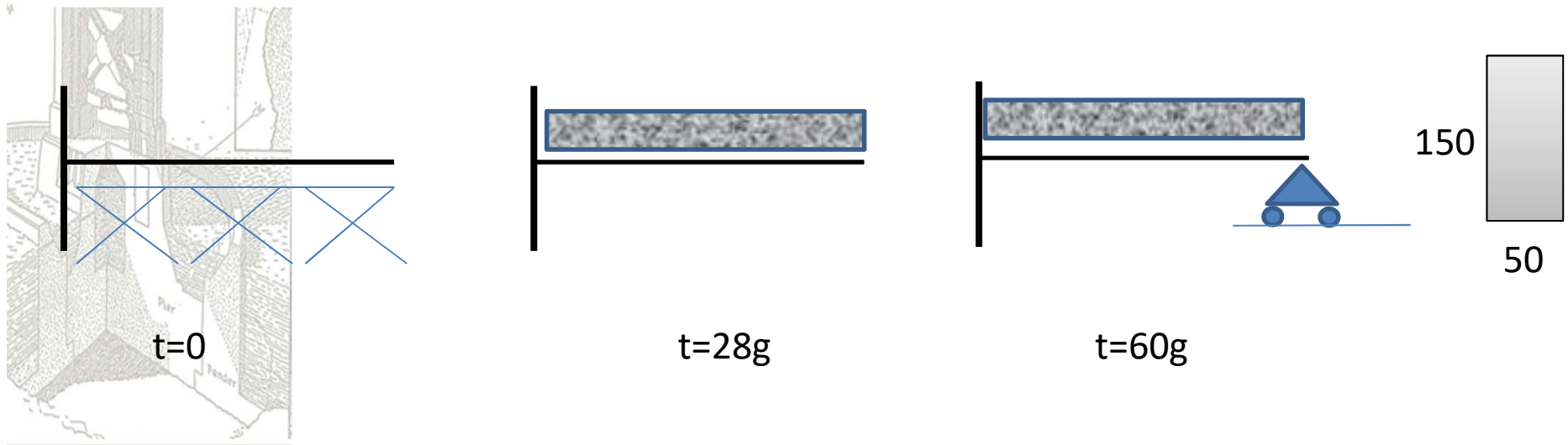
$$\sum_{i \in \mathbb{V}} W_{ki}(t_l) \Delta R_i(t_l) = - \sum_{j=1}^{n_f} W_{kj}(t_{0j}) F_j(t_{0j}) [\phi(t_l, t_{0j}) - \phi(t_v, t_{0j})] +$$

$$- \sum_{i \in \mathbb{V}} \sum_{h=0}^{l-1} W_{ki}(t_h) \Delta R_i(t_h) [1 + \phi(t_l, t_h)] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{V} \quad (7)$$

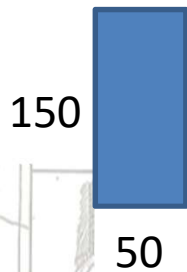


Esempio: inserimento di un vincolo di appoggio

Con il calcestruzzo descritto nell'esempio precedente si realizza la mensola rappresentata in Fig. 4, con $L = 10\text{ m}$, $b = 50\text{ cm}$, $h = 150\text{ cm}$. La mensola è caricata al tempo $t_0 = 28$ giorni con un carico (compreso il peso proprio) $q = 40\text{ kN/m}$. Dopo 60 giorni dal getto, all'estremità della mensola viene inserito un vincolo di semplice appoggio, che impedisce ulteriori abbassamenti. Si vuole determinare l'evoluzione della reazione vincolare Y e del momento massimo nella mensola.



Con riferimento ai valori calcolati in precedenza, assumendo lo stesso valore per l'umidità dell'aria, si modifica solo la dimensione equivalente $h = 2A_c/u$. Supponendo che tutta la sezione sia esposta all'aria, si ha



$$h = \frac{2 \times 50 \times 150}{2(50 + 150)} = 37.5 \text{ cm}$$

Nel caso in esame, poiché il carico q non varia nel tempo, si applica la (7) con $n_f = 1$ ed un solo vincolo. I termini della matrice di flessibilità relativi al punto vincolato, si determinano facilmente applicando il PLV. Tenendo conto che per una forza unitaria (positiva verso l'alto)

$$m_1(x) = L - x$$

e pertanto, indicando con χ_1 la relativa curvatura

$$\chi_1 = \frac{L - x}{E_c J}$$

dove J indica il momento di inerzia della sezione ($J = \frac{bh^3}{12} = 0.141 \text{ m}^4$), mentre il momento del carico distribuito (unitario) sulla mensola è

$$m_q(x) = \frac{(L - x)^2}{2}$$

si ottiene

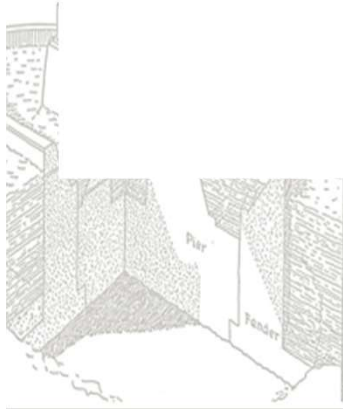
$$W_{1q} = \int_0^L \chi_1(x) m_q(x) dx = \frac{1}{2E_c J} \int_0^L (L - x)^3 dx = \frac{L^4}{8E_c J}$$

Mentre per la reazione $Y = 1$

$$m_Y(x) = (L - x)$$

e pertanto

$$W_{11} = \frac{1}{E_c J} \int_0^L (L - x)^2 dx = \frac{L^3}{3E_c J}$$



Per effetto del carico q l'estremità della mensola subisce un abbassamento che, al momento dell'applicazione del carico è $w_1(t_0) = 9.7$ mm e, al momento dell'inserimento del vincolo $t_1 = 60$ giorni, $w_1(t_1) = 16.2$ mm. Dopo questo istante il punto rimane fisso, quindi

$$\Delta Y_i = -\frac{1}{W_{11}(t_i)} \left\{ w_1(t_i, t_0) - w_1(t_1, t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} W_{11}(t_j) \Delta Y_j [1 + \phi(t_i, t_j)] \right\}$$

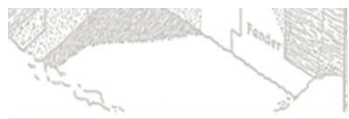
in cui $w(t, t_0)$ è la deformazione al tempo t dovuta al carico q , applicato al tempo t_0 :

$$w_1(t, t_0) = -qW_{1q}(t_0) [1 + \phi(t, t_0)]$$



La reazione al tempo $t_i \geq t_1$ si ottiene sommando tutti gli incrementi fino a t_i :

$$Y_i = \sum_{j=1}^i \Delta Y_j = \Delta Y_i + Y_{i-1}$$



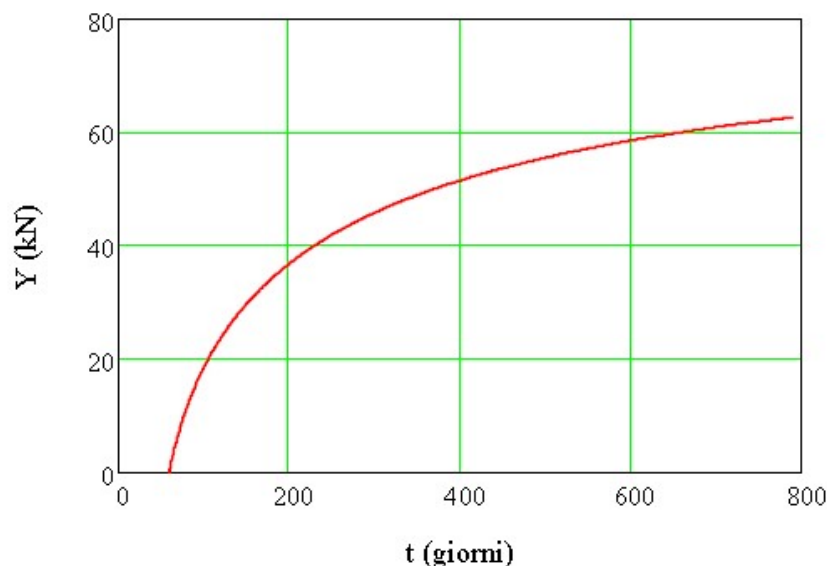


Figura 5: Evoluzione della reazione all'estremità della mensola

Nella Fig. 5 è illustrata l'evoluzione di Y nel tempo; nella figura successiva (6) è mostrato il grafico di $M_0(t)$ (con segno opposto a quello dell'usuale convenzione), dove M_0 è il momento all'incastro prodotto dal carico e dalla reazione vincolare. Appare qui evidente l'effetto rilevante e benefico delle deformazioni viscosi, che riducono questo momento dal valore iniziale di 2000 kN m a meno di 1400 kN m, dopo due anni dall'imposizione del vincolo.

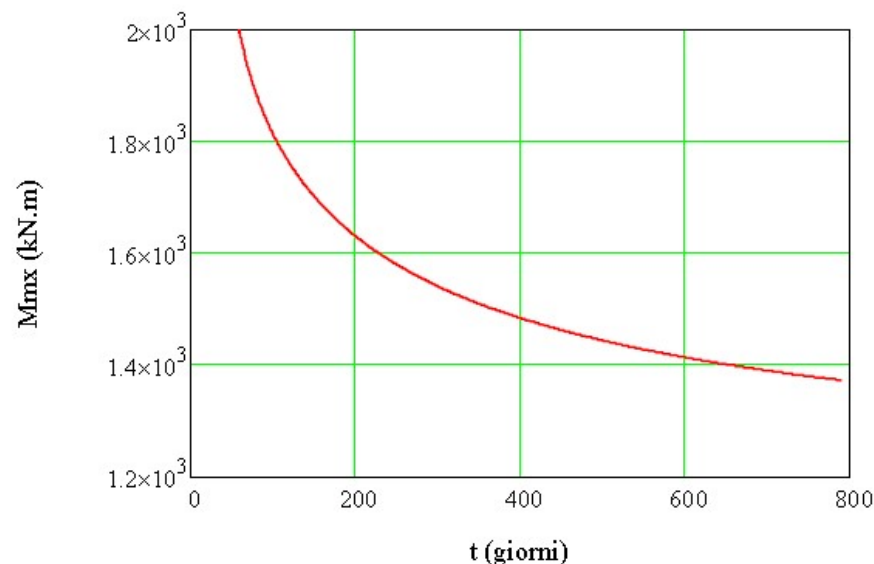


Figura 6: Evoluzione del momento di incastro della mensola

Nella Fig. 5 è illustrata l'evoluzione di Y nel tempo; nella figura successiva (6) è mostrato il grafico di $M_0(t)$ (con segno opposto a quello dell'usuale convenzione), dove M_0 è il momento all'incastro prodotto dal carico e dalla reazione vincolare. Appare qui evidente l'effetto rilevante e benefico delle deformazioni viscosi, che riducono questo momento dal valore iniziale di 2000 kN m a meno di 1400 kN m, dopo due anni dall'imposizione del vincolo.

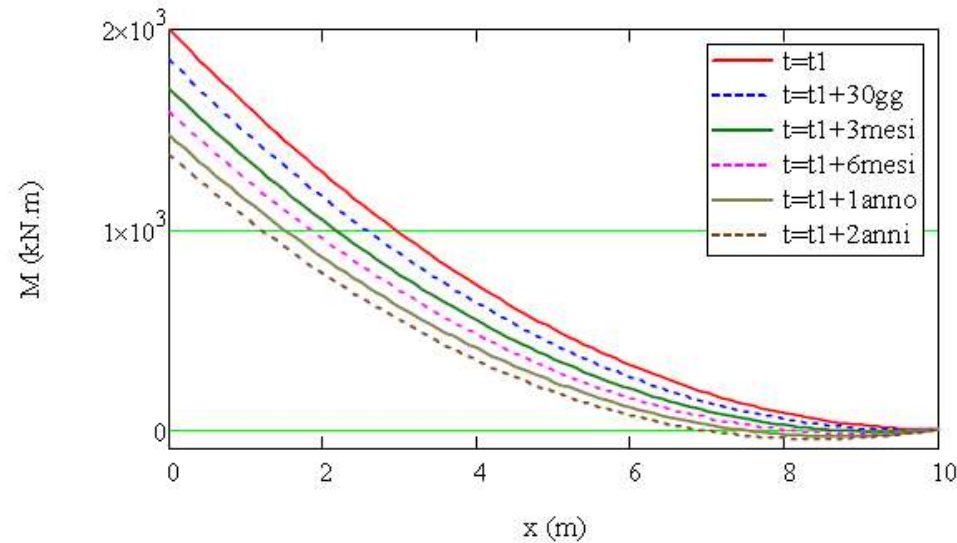


Figura 7:

Nella Fig. 7 infine sono riportati i grafici dei momenti nella trave per diversi istanti di tempo, a partire da quello di applicazione del vincolo.



Esempio: Inserimento di un glifo

Nel caso dei ponti a mensola, il vincolo imposto è generalmente un glifo (ad eccezione delle campate terminali, dove è un appoggio).

Nel caso del glifo si applicano le stesse formule precedenti, sostituendo il momento M , alla reazione Y e le rotazioni θ agli spostamenti w .

$$\theta = q \frac{L^3}{6E_c J}$$

Inoltre il coefficiente di flessibilità è

$$W_{11} = \frac{L}{E_c J}$$

Con gli stessi dati dell'esempio precedente, la variazione del momento di estremità M (positivo se orario) nel tempo è mostrato in Fig. 8.

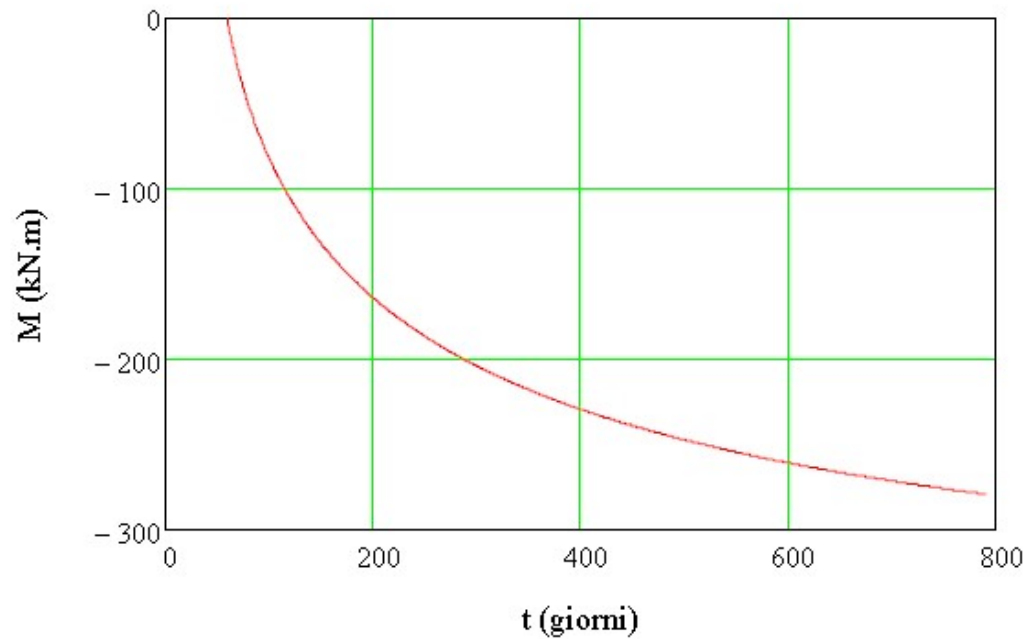
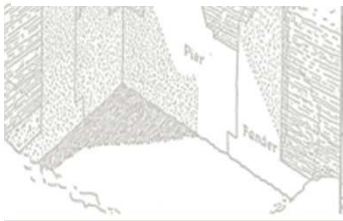


Figura 8: Momento all'estremità della mensola dopo l'inserimento del glifo.



Nella successiva Fig. 9 è invece illustrata l'evoluzione del momento all'incastro.

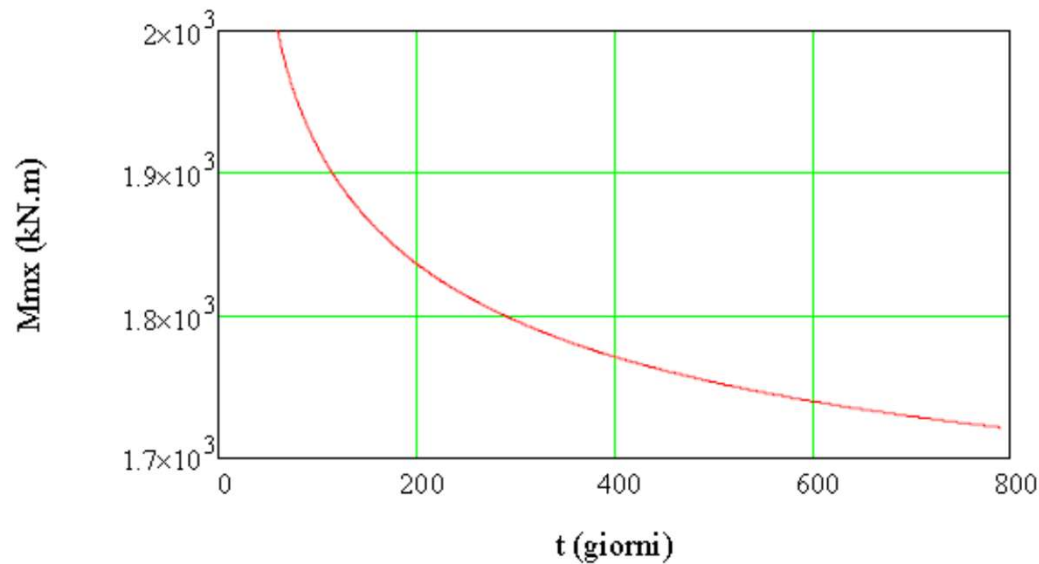
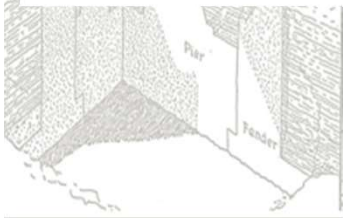


Figura 9: Evoluzione del momento d'incastro dopo l'inserimento del glifo



Nella Fig. 10 infine sono rappresentati i diagrammi dei momenti nella trave, per 5 diversi istanti di tempo.

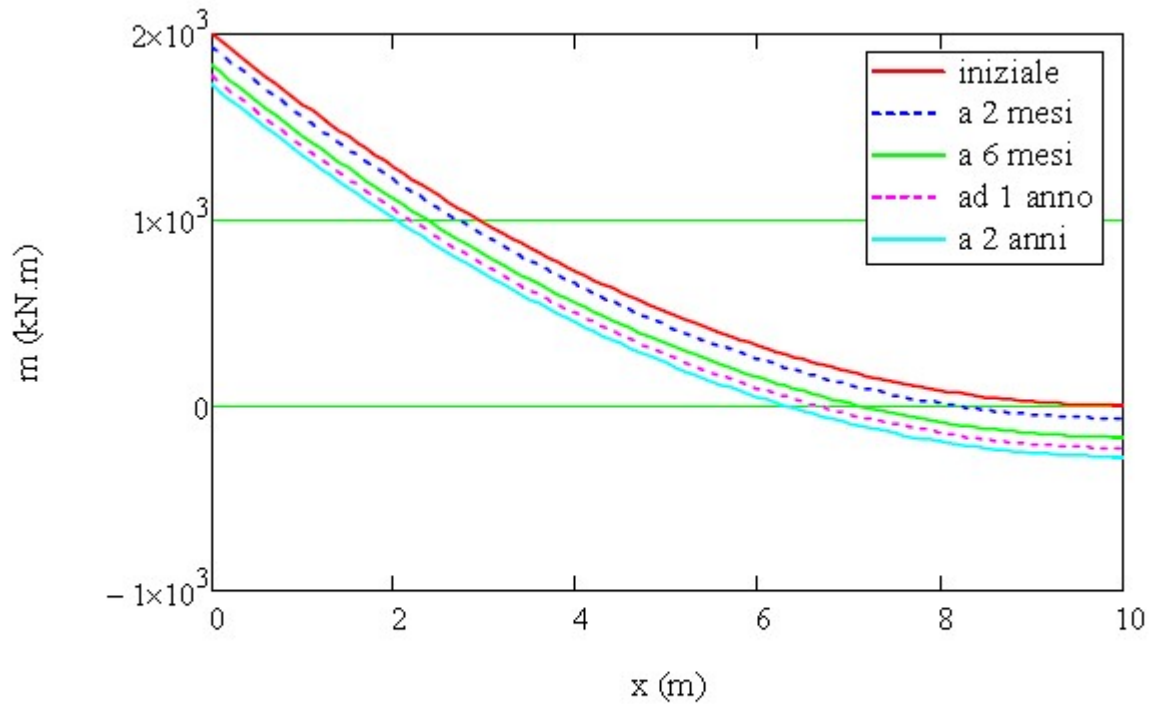


Figura 10:

