

Progetto di Strutture

- ▶ Dipartimento di Ingegneria
 - ▶ Corso di Laurea in Ingegneria Civile
 - ▶ A/A 2018-2019
-

IL PROGETTO DELLE TRAVI IN C.A. SOGETTE A TORSIONE

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

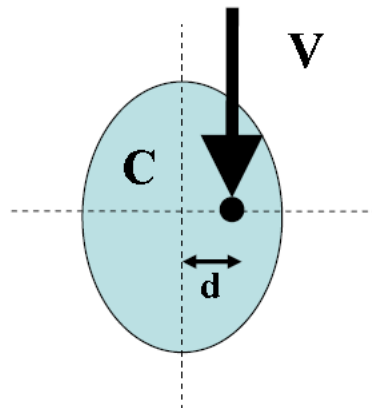
INTRODUZIONE

La sollecitazione di TORSIONE

La sollecitazione di TORSIONE si presenta quando l'azione applicata NON passa per il centro di taglio C della sezione.

La TORSIONE è sempre accompagnata da flessione e taglio.

La TORSIONE viene usualmente trascurata, salvo poi tenerne conto per una verifica puntuale di alcuni elementi caratteristici per i quali tale sollecitazione non è trascurabile, come accade ad esempio per le travi a ginocchio, elementi strutturali necessari per sostenere le rampe del corpo scala.



INTRODUZIONE

TORSIONE: primaria e secondaria

Qualora l'equilibrio statico di una struttura dipenda dalla resistenza torsionale degli elementi che la compongono sarà necessario un calcolo completo della torsione nei riguardi sia degli stati limite ultimi che di esercizio (**Torsione primaria**).

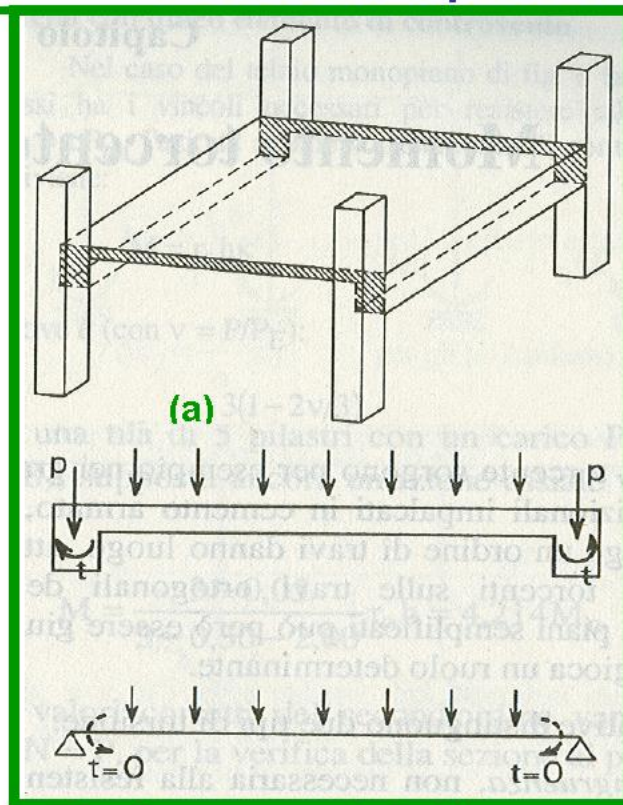
Qualora, in strutture iperstatiche, la torsione insorga solo per esigenze di compatibilità e la stabilità della struttura non dipenda dalla resistenza torsionale, non sarà generalmente necessario considerare la torsione allo stato limite ultimo (**Torsione secondaria**).

Nei casi in cui la torsione non è essenziale per la stabilità, possono comunque essere richiesti adeguati accorgimenti per limitare un'eccessiva fessurazione allo stato limite d'esercizio (valori minimi di staffe e ferri longitudinali)

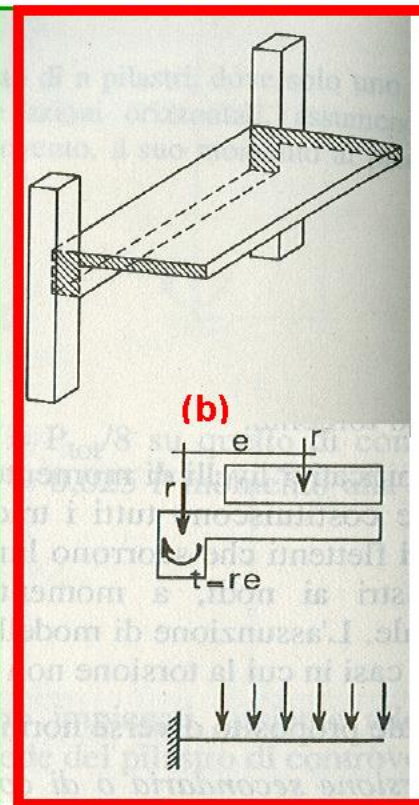
Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

INTRODUZIONE

TORSIONE: primaria e secondaria



**Torsione secondaria (a)
o di congruenza**

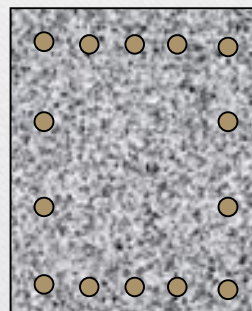


**Torsione primaria (b)
o di equilibrio**

INTRODUZIONE

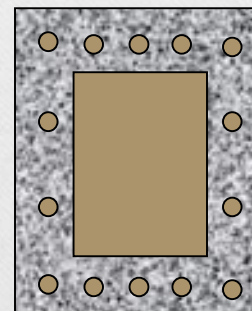
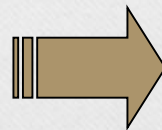
SLU per torsione in travi in c.a. (Posizione del Problema)

Il comportamento di travi in calcestruzzo soggette a torsione è molto differente al variare del livello di sollecitazione. Per bassi livelli di sollecitazione la trave si comporta con buona approssimazione come una trave di De Saint-Venant, dunque con sezione interamente reagente (I° Stadio). Al crescere del momento torcente la trave comincia a fessurarsi con riduzione della rigidità torsionale, reagendo soltanto in parte alla sollecitazione. Si assume che la parte di conglomerato utile alla resistenza torsionale sia quella esterna, attribuendo alla zona interna un contributo trascurabile. La resistenza della trave allo stato limite ultimo è fornita da una parte limitata della sezione e dalle armature presenti.



I° Stadio

M_t crescente



III° Stadio

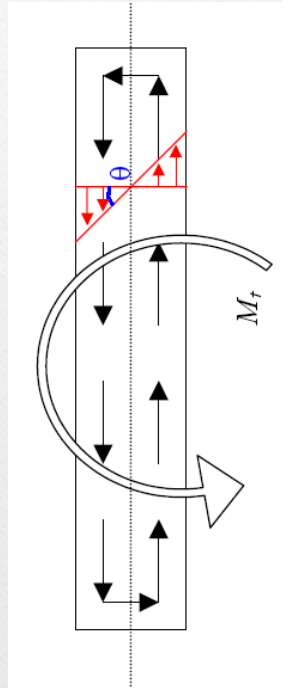
Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (I° stadio)

SEZIONI MONOCONNESSE (SEZIONI RETTANGOLARI)

Al I° stadio la trave si comporta approssimativamente come una trave di De Saint-Venant soggetta a Momento Torcente. Le tensioni tangenziali presentano un andamento lineare che si annulla a metà dello spessore.

Andamento delle tensioni tangenziali τ



Tensioni Tangenziali

$$\tau_{\max} = \psi_1 \frac{M_t}{b^2 h}$$

$$\psi_1 \cong \frac{1}{3 + 1.8\beta} \quad \beta = \frac{b}{h}$$

h, b : altezza, base della sezione

Rigidezza Torsionale

$$M_t = K_t \theta = G \cdot J_T \theta = G \psi_2 b^3 h \theta \quad \psi_2 \cong \frac{1}{3 + 4.1\sqrt{\beta^3}}$$



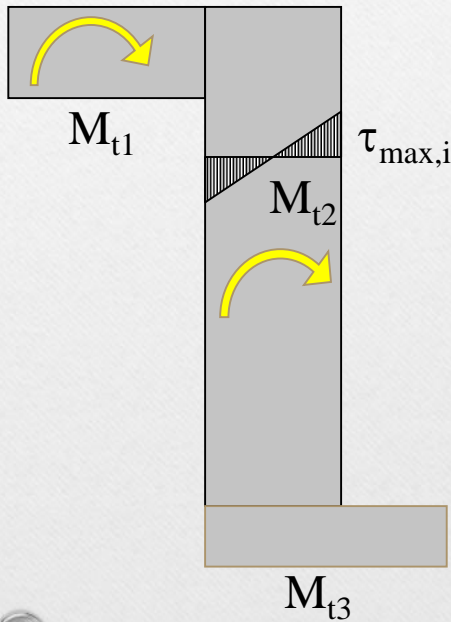
Angolo di torsione: *Rotazione tra due sezioni a distanza unitaria*
 J_t : *Momento di inerzia torsionale*

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (I° stadio)

SEZIONI MONOCONNESSE (SEZIONI RETTANGOLARI)

Nelle travi con sezione decomponibile in più rettangoli, il momento torcente agente nei singoli rettangoli si valuta in proporzione alla rigidezza torsionale dei rettangoli stessi.



Momento Torcente e tensioni tangenziali nel rettangolo i-mo

$$M_{ti} = M_t \frac{K_{ti}}{\sum_i K_{ti}} \quad \tau_{\max,i} = \psi_i \frac{M_{ti}}{b_i^2 h_i}$$

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (I° stadio)

SEZIONI CAVE (VALUTAZIONE TENSIONI TANGENZIALI)

Nelle travi a sezione cava le relazioni precedenti non sono applicabili. Per sezioni di piccolo spessore esiste una teoria approssimata dovuta a **Bredt** che permette di valutare la tensione media lungo lo spessore.

La forza elementare agente sul tratto di sezione di lunghezza ds risulta essere pari a:

$$dF = q ds = \tau h ds$$

Il momento esterno M_t dovrà essere equilibrato dalla somma dei momenti che le forze dF hanno rispetto al baricentro della sezione:

$$M_t = \oint q ds r = \oint q ds r = q \oint r ds = 2qA$$

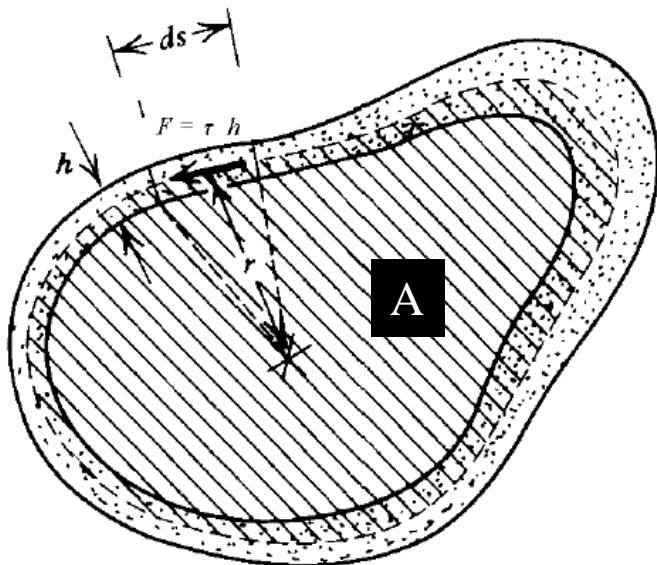
Costanza flusso delle tensioni

$$\tau = \frac{M_t}{2Ah}$$

Formula di Bredt

se $h = \text{cost}$

$$K_t = 4GA^2 / \oint \frac{ds}{h} = 4GA^2 / \frac{S}{h}$$

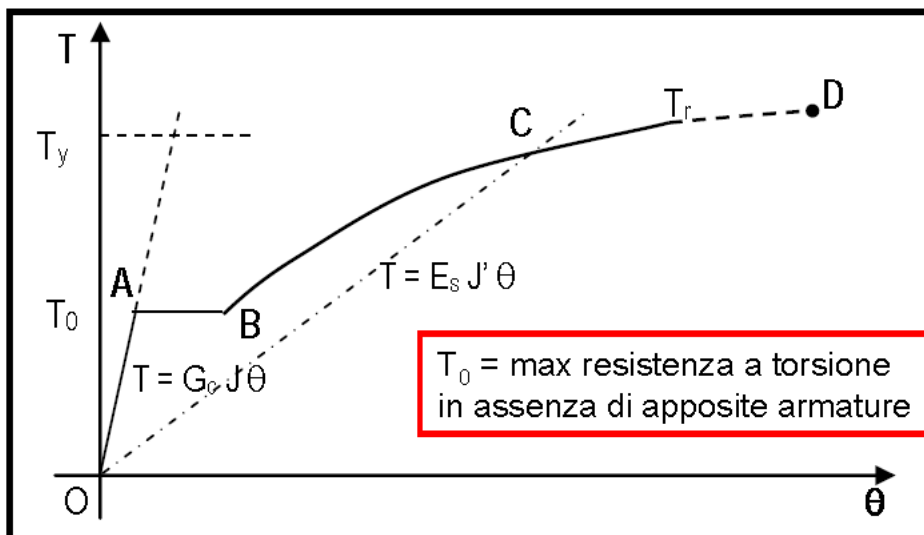
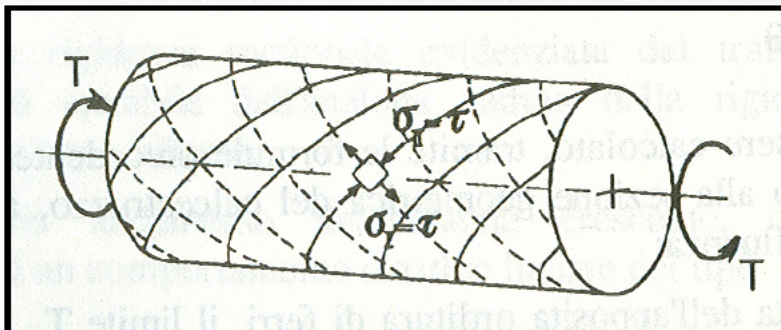


Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

Le travi soggette a torsione denotano un comportamento nettamente differente nei due stadi non fessurato e fessurato.

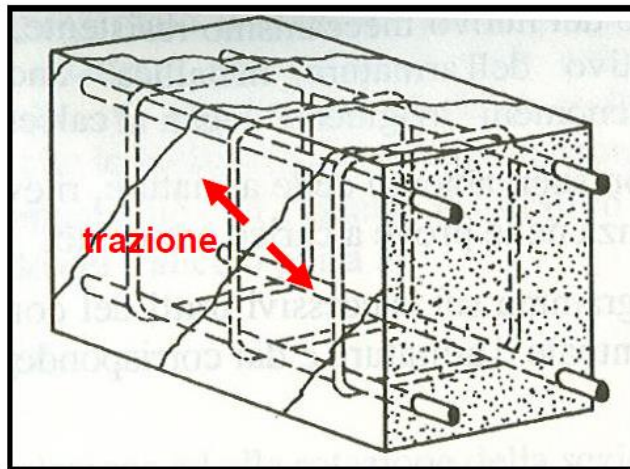
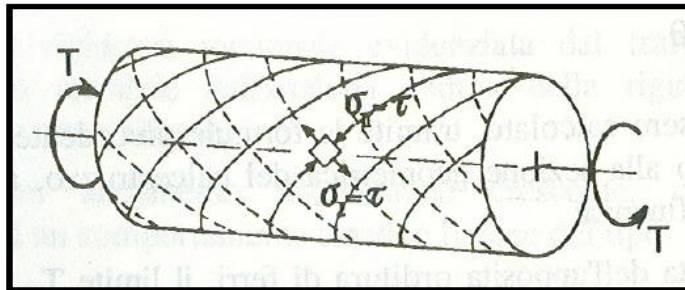
La caratteristica principale della diversità è la forte riduzione, fino a 1/4 a 1/5, della rigidità torsionale che interviene con la fessurazione.



Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)



Andamento delle
fessurazioni in una trave in
c.a. confrontato con
l'andamento delle tensioni
principali di trazione

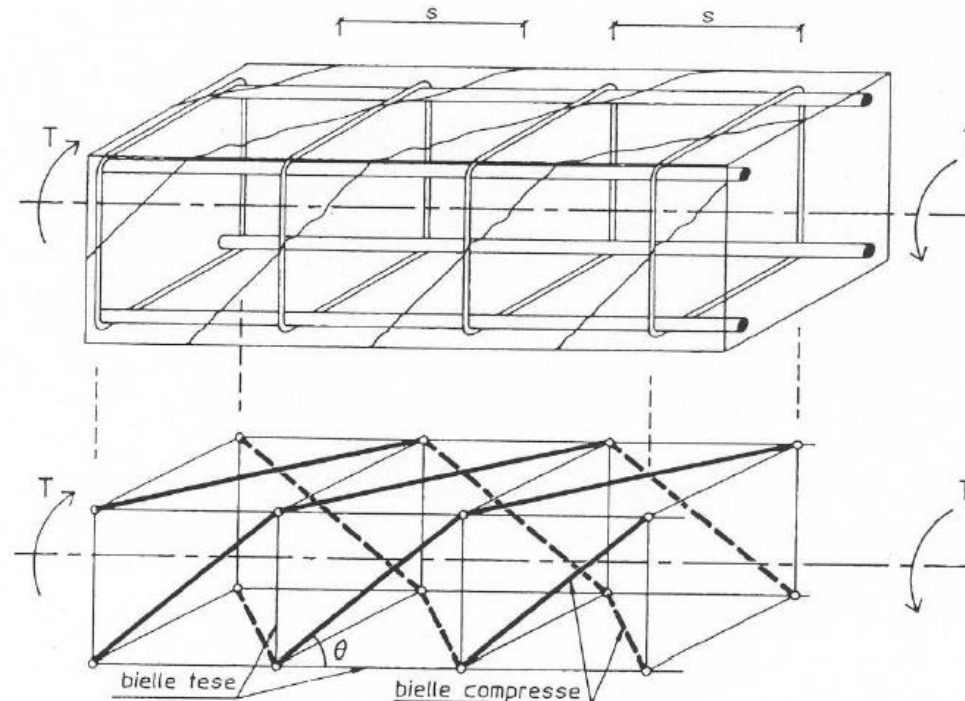
Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Traliccio spaziale
costituito da:

- bielle di calcestruzzo compresso inclinate di un angolo θ
- bielle di acciaio tese rappresentate dalle armature longitudinali e dalle staffe chiuse disposte ortogonalmente alla linea d'asse



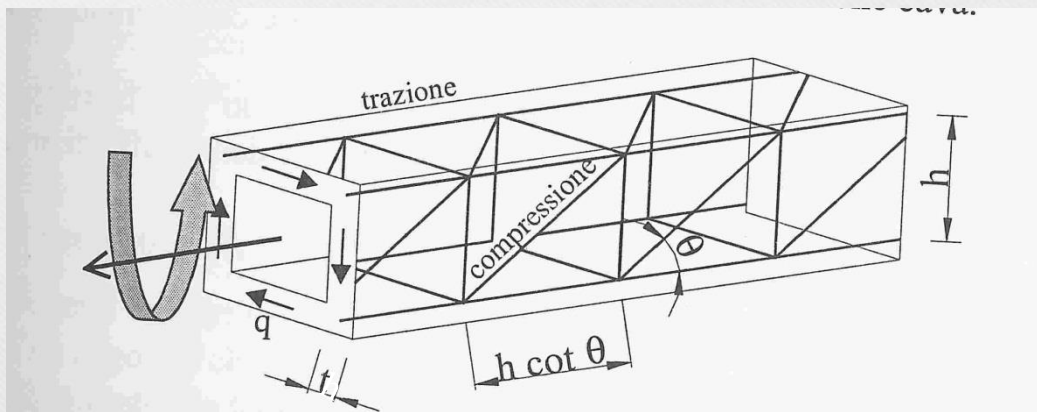
SCHEMATIZZAZIONE A TRALICCIO

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

STATO FESSURATIVO E MODELLO A TRALICCIO

Nel momento in cui la trave si fessura perde rigidità e la sezione reagisce solo parzialmente alla sollecitazione. Allo stato limite ultimo è ragionevole adottare un modello a traliccio, considerando come parte reagente della sezione una **sezione cava di spessore t** . L'andamento delle linee isostatiche prima illustrato suggerisce il modello indicato in figura costituito da bielle compresse di cls e bielle tese rappresentate dall'armatura in ognuna delle quattro facce esterne.



TRALICCIO
DI
RAUSCH

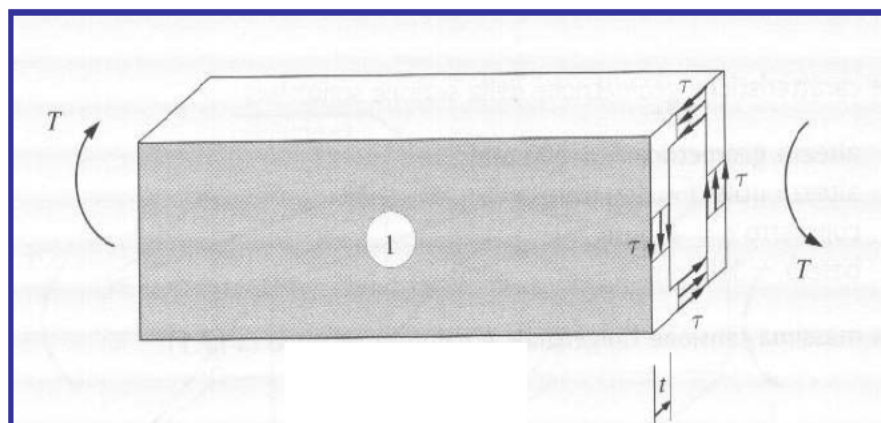
La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Per la progettazione (e verifica) delle sezioni sottoposte a momento torcente si assume un modello di calcolo con sezione cava a parete sottile di spessore t .

Le tensioni tangenziali sono ipotizzate costanti all'interno dello spessore della parete.

L'angolo θ di inclinazione delle bielle di cls è considerato variabile, con valore funzione delle quantità di armatura longitudinale e trasversale
(modello a inclinazione variabile)



La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Valutazione dello sforzo nell'armatura longitudinale S_l

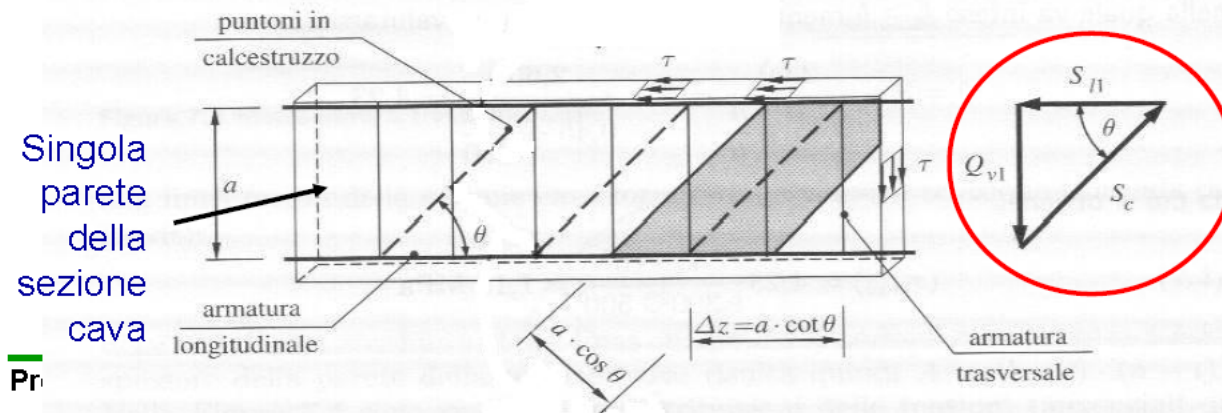
Lo sforzo di scorrimento trasversale sulla faccia verticale vale

$$Q_{v1} = \tau \cdot t \cdot a$$

Le altre componenti del poligono di forze sono:

S_l trazione nelle barre longitudinali nella singola parete

S_c compressione nel puntone di cls



SLU per torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Lo sforzo di trazione nelle barre longitudinali è valutato attraverso:

$$S_{11} = Q_{v1} \cdot \cot \theta = \tau \cdot t \cdot a \cdot \cot \theta$$

Lo sforzo di trazione totale si ottiene sommando i contributi di ogni parete:

$$S_1 = \sum_{i=1}^4 S_{1i} = \cot \theta \cdot \sum_{i=1}^4 \tau \cdot t \cdot a_i$$

Definendo *perimetro medio* p il valore

$$p = \sum_{i=1}^4 a_i$$

e introducendo l'ipotesi di Bredt, si ha:

$$S_1 = \tau \cdot t \cdot p \cdot \cot \theta = \frac{T}{2A} \cdot p \cdot \cot \theta$$

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Uguagliando il massimo valore di trazione delle barre S_{ld} con lo sforzo S_l indotto dall'azione torcente si ottiene il valore del momento torcente T_{Rld} che produce la crisi dell'armatura longitudinale:

$$S_{ld} = f_{yd} \cdot A_{sl} = \frac{T_{Rld}}{2 \cdot A} \cdot p \cdot \cot \theta = S_l$$

$$T_{Rld} = f_{yd} \cdot A_{sl} \cdot \frac{2 \cdot A}{p} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

**Momento torcente resistente
delle barre longitudinali**

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Valutazione dello sforzo nell'armatura trasversale S_s

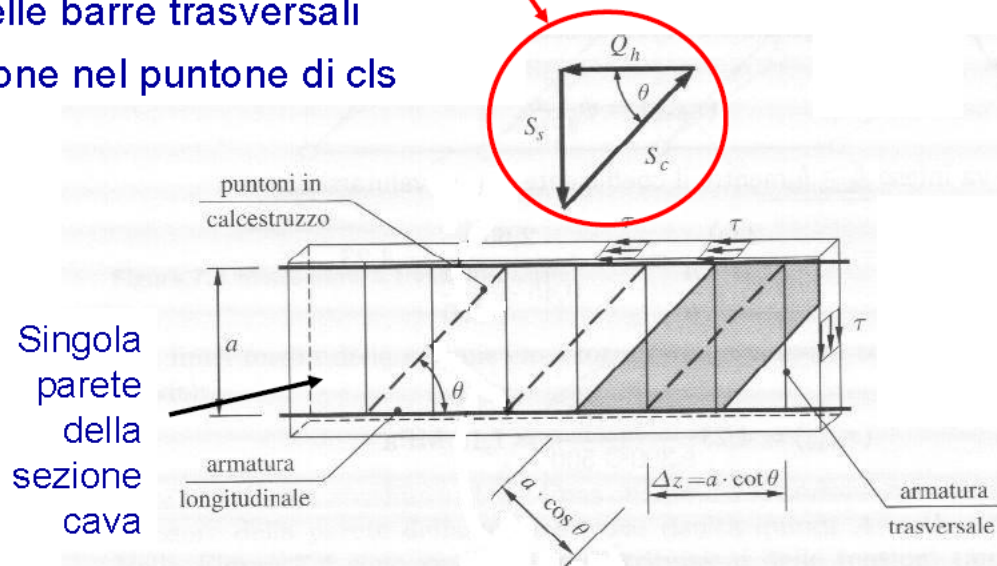
Lo sforzo di scorrimento trasversale sulla faccia orizzontale vale:

$$Q_h = \tau \cdot t \cdot \Delta z$$

Le altre componenti del poligono di forze sono:

S_s trazione nelle barre trasversali

S_c compressione nel puntone di cls



La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Lo sforzo di trazione nelle armature trasversali è valutato attraverso:

$$S_s = Q_h \cdot \operatorname{tg}\theta = \tau \cdot t \cdot \Delta z \cdot \operatorname{tg}\theta = \frac{T}{2A} \cdot \Delta z \cdot \operatorname{tg}\theta$$

Uguagliando il massimo valore di trazione delle barre S_{sd} con lo sforzo S_s indotto dall'azione torcente si ottiene il valore del momento torcente T_{Rsd} che produce la crisi dell'armatura trasversale:

$$S_{sd} = f_{yd} \cdot \frac{A_s \cdot \Delta z}{s} = \frac{T_{Rsd}}{2 \cdot A} \cdot \Delta z \cdot \operatorname{tg}\theta \rightarrow T_{Rsd} = f_{yd} \cdot A \cdot \frac{2 \cdot A_s}{s} \cdot \operatorname{cot}\theta$$

**Momento torcente resistente
delle armature trasversali**

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

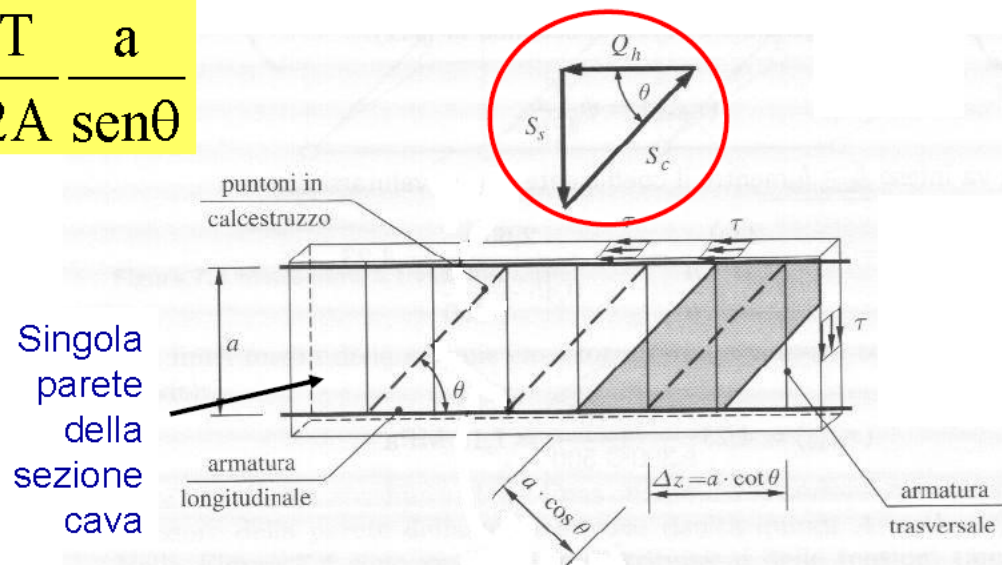
S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Valutazione dello sforzo di compressione delle bielle di cls S_c

La componente di compressione S_c del poligono di forze è pari a:

$$S_c = \frac{Q_h}{\cos\theta} = \frac{\tau \cdot t \cdot \Delta z}{\cos\theta} = \frac{\tau \cdot t \cdot a \cdot \cot\theta}{\cos\theta} =$$

$$= \frac{\tau \cdot t \cdot a}{\sin\theta} = \frac{T}{2A} \frac{a}{\sin\theta}$$



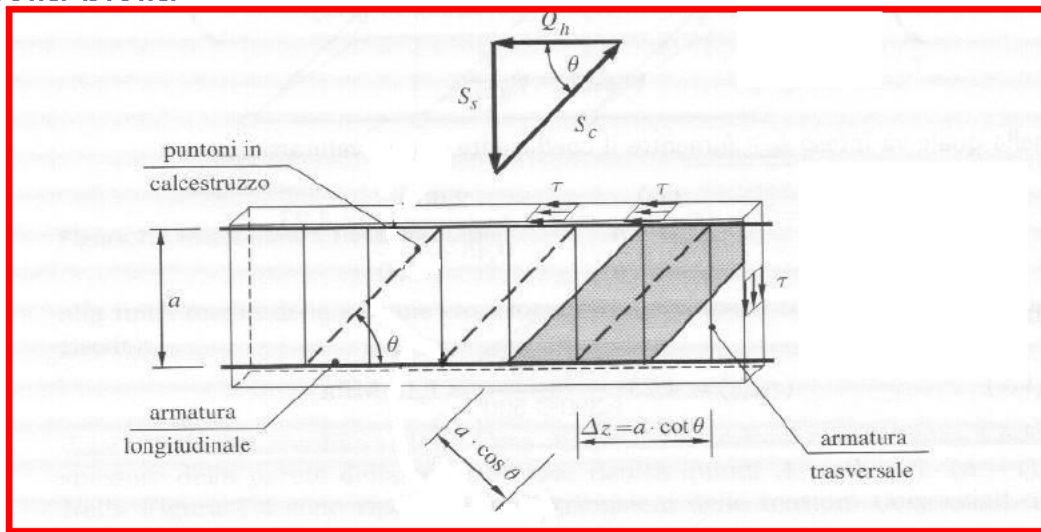
Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

La massima capacità del puntone compresso è valutabile attraverso:

$$S_{cd} = v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot a \cdot \cos \theta$$



La torsione in travi in c.a. (III° stadio)

S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

Uguagliando il massimo valore di compressione delle bielle di cls S_{cd} con lo sforzo indotto dall'azione torcente S_c si ottiene il valore del momento torcente T_{Rcd} che produce la crisi della biella compressa:

$$S_{cd} = v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot a \cdot \cos \theta = \frac{T}{2A} \frac{a}{\sin \theta}$$

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = 2 \cdot A \cdot v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

Momento torcente resistente delle bielle compresse

La massima resistenza si ottiene per una inclinazione $\theta = 45^\circ$.

S.L.U. TORSIONE

La verifica dello SLU per sollecitazioni di torsione è soddisfatta se:

$$T_{Rd} \geq T_{Ed}$$

dove T_{Ed} è il valore di calcolo del **momento torcente agente** e T_{Rd} è il **momento torcente resistente** pari al minimo tra il valore della resistenza delle bielle di cls compresse (T_{Rcd}), delle barre longitudinali (T_{Rld}), e delle armature trasversali (T_{Rsd}):

$$T_{Rd} = \min (T_{Rcd}, T_{Rld}, T_{Rsd})$$

La verifica è riferita a sezioni prismatiche cave o piene il cui schema resistente è riconducibile a un traliccio periferico in cui gli sforzi di trazione sono affidati alle armature longitudinali e trasversali ivi contenute e gli sforzi di compressione sono affidati alle bielle di calcestruzzo.

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

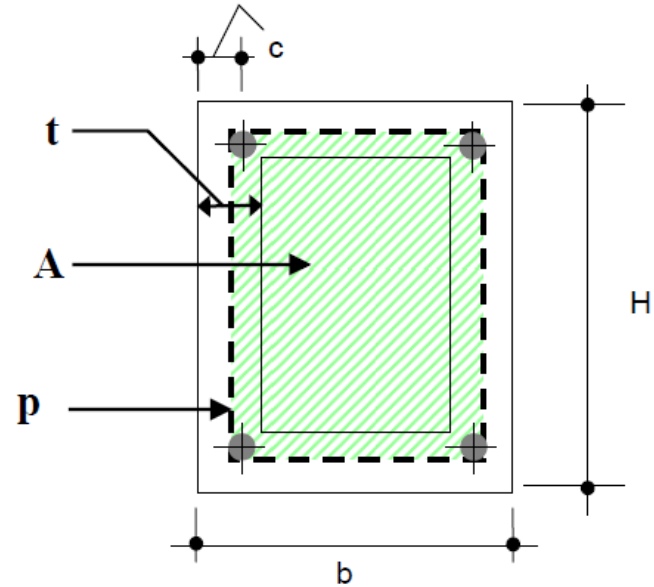
S.L.U. TORSIONE

Momento torcente resistente delle **bielle di calcestruzzo** (T_{Rcd})

La resistenza delle bielle si calcola attraverso la seguente espressione:

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot \theta / (1 + \cot^2 \theta)$$

- $t = A_c / u \geq 2c$ è lo spessore della sezione cava;
- $A_c = b \times H$ è l'area della sezione;
- p è il perimetro medio della sezione;
- A area racchiusa entro la fibra media del perimetro della sezione;
- f'_{cd} f'_{cd} resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ($f'_{cd} = 0,5 \times f_{cd}$);
- θ angolo di inclinazione delle bielle di cls con limitazione $1.0 \leq \cot \theta \leq 2.5$



$1.0 \leq \cot \theta \leq 2.5$

NOTA: la tensione del cls è ridotta perché le bielle sono presso-inflesse

S.L.U. TORSIONE (NTC2008)

Momento torcente resistente delle **armature trasversali e longitudinali** (T_{Rsd} , T_{Rld})

La resistenza delle armature trasversali si calcola attraverso la seguente espressione:

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta$$

La resistenza delle armature longitudinali si calcola attraverso la seguente espressione:

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_{sl}}{p} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

$t = A_c/u$ è lo spessore della sezione cava, A_c è l'area e u il perimetro;

A_s è l'area della staffa;

p è il perimetro medio del nucleo resistente,

s passo delle staffe;

A_{sl} area complessiva delle barre longitudinali;

A area racchiusa nel perimetro medio della sezione cava

θ angolo di inclinazione delle bielle di cls con la limitazione $1.0 \leq \cot \theta \leq 2.5$

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

COMPORAMENTO A ROTTURA DELLE SEZIONI

Nelle sezioni in c.a. sottoposte a torsione sono possibili 3 diverse condizioni di verifica:

- **Snervamento simultaneo delle armature (staffe + barre longitudinali)**
- **Rottura delle bielle di cls e contemporaneo snervamento delle staffe**
- **Rottura delle bielle di cls e contemporaneo snervamento delle barre longitudinali**

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

CASO1: ROTTURA SIMULTANEA DELLE ARMATURE (STAFFE + BARRE)

Il valore $\cot\theta$ è determinato imponendo l'uguaglianza tra T_{Rsd} e T_{Rld}

$$T_{Rld} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta = (a_l / a_s)^{1/2} \quad \text{dove} \quad a_l = \sum A_l / p \quad \text{e} \quad a_s = A_s / s$$

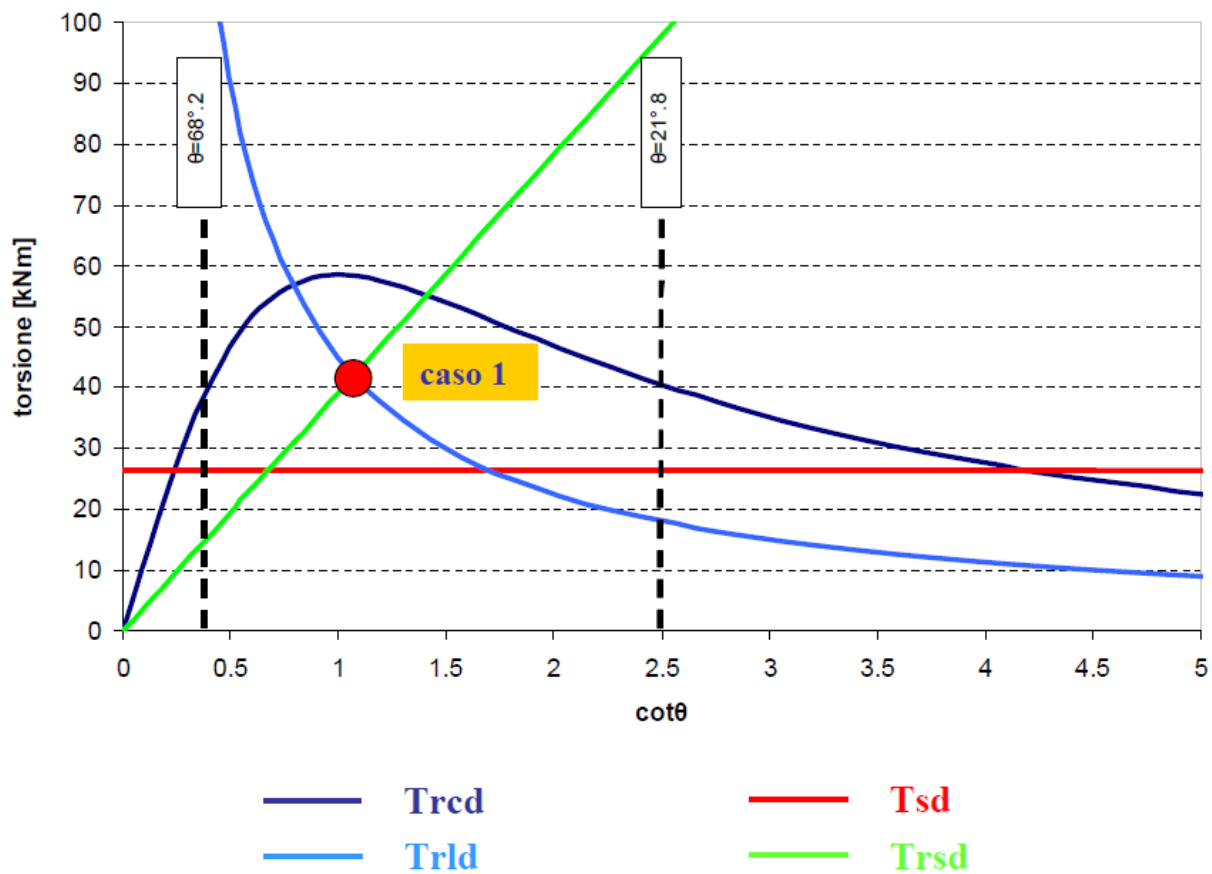
Se risulta che $1.0 \leq \cot\theta \leq 2.5$ e $T_{Rcd}(\cot\theta) \geq T_{Rld} = T_{Rsd}$

allora la torsione resistente (T_{Rd}) è uguale alla torsione resistente delle staffe ovvero delle barre longitudinali ($T_{Rld} = T_{Rsd}$) (**caso1**)

$$T_{Rd} = T_{Rld} = T_{Rsd}$$

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

Se T_{Rcd} calcolato in corrispondenza del valore $\cot\theta$ è minore di T_{Rsd} (ovvero T_{Rld}) allora la crisi avviene per:

CASO 2: ROTTURA DELLE BIELLE DI CLS E SNERVAMENTO DELLE STAFFE

oppure

CASO 3: ROTTURA DELLE BIELLE DI CLS E SNERVAMENTO DELLE BARRE LONGITUDINALI

Bisogna, quindi, determinare il valore della $\cot\theta$ per i due casi di rottura 2 e 3 ($\cot\theta_s$; $\cot\theta_l$).

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

CASO 2: ROTTURA DELLE BIELLE DI CLS E SNERVAMENTO DELLE STAFFE

Il valore $\cot\theta_s$ è determinato imponendo l'uguaglianza tra T_{Rsd} e T_{Rcd}

$$T_{Rcd} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta_s = \sqrt{\frac{t \cdot f'_{cd} \cdot s}{A_s \cdot f_{yd}} - 1}$$

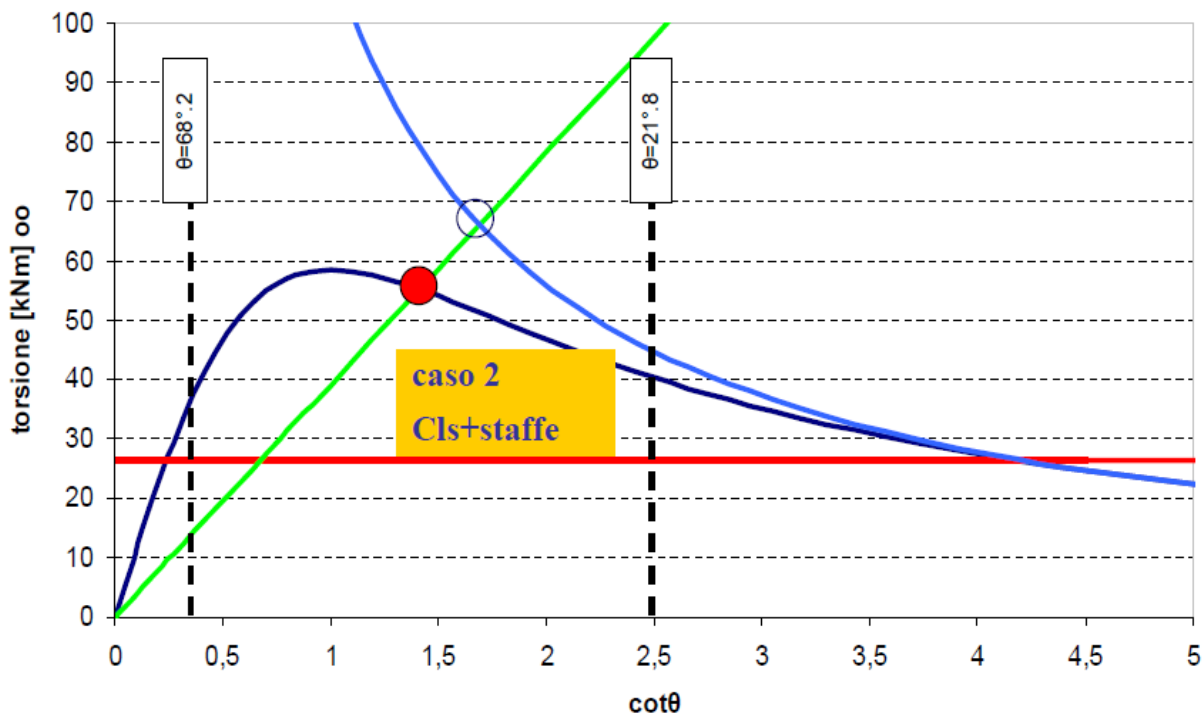
CASO 3: ROTTURA DELLE BIELLE DI CLS E SNERVAMENTO DELLE BARRE LONGITUDINALI

Il valore $\cot\theta_l$ è determinato imponendo l'uguaglianza tra T_{Rld} e T_{Rcd}

$$T_{Rcd} = T_{Rld} \Rightarrow \cot\theta_l = \sqrt{\frac{\frac{\sum A_l \cdot f_{yd}}{u_m}}{t \cdot f'_{cd} - \frac{\sum A_l \cdot f_{yd}}{u_m}}}$$

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

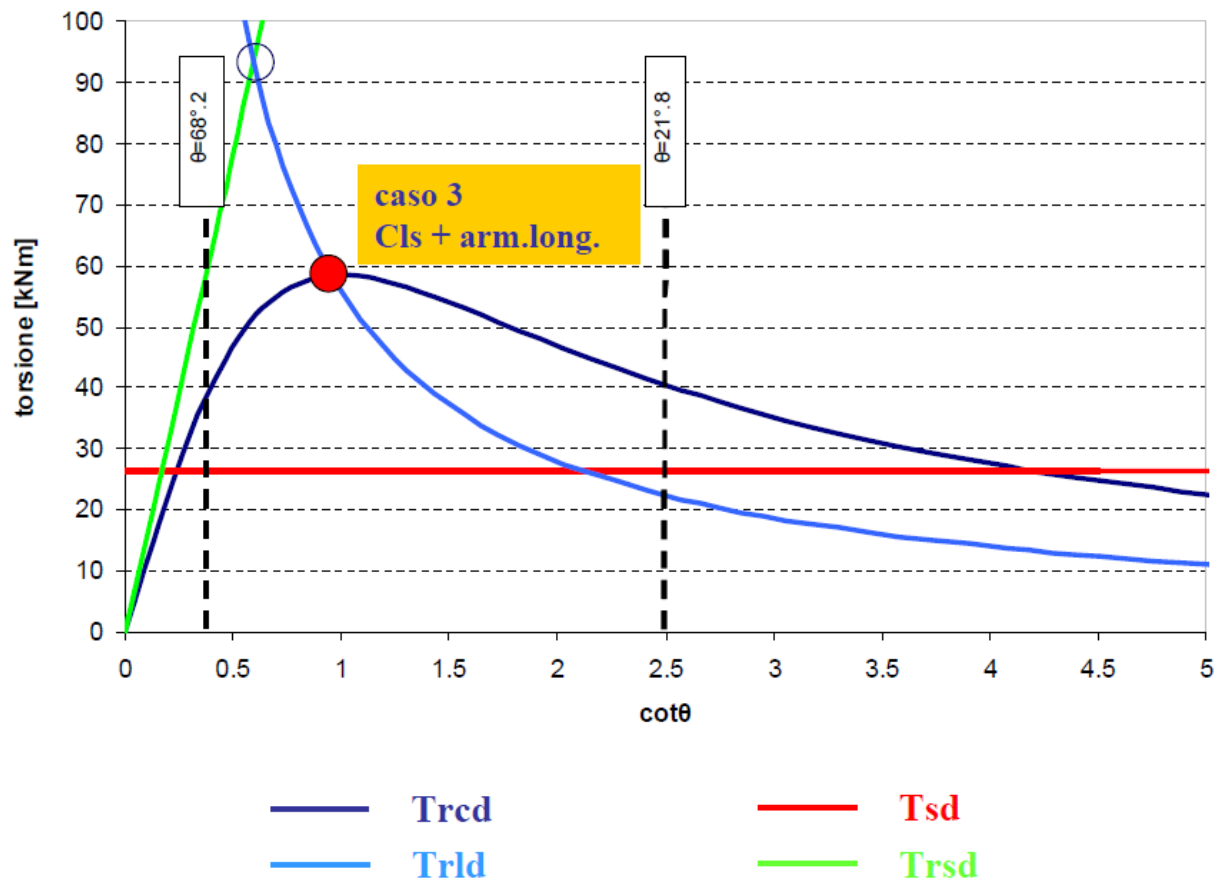


— T_{red}
— T_{rd}

— T_{sd}
— T_{rsd}

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

In considerazione del limite di norma sul valore di $\cot\theta$ si possono avere dei *sotto-casi* di verifica.

Se risulta $\cot\theta = (a_1 / a_s)^{1/2} > 2.5$ allora nella sezione si attinge la crisi simultanea delle bielle di cls e delle armature trasversali (CASO 2.1)

Il valore di $\cot\theta$ è determinato ponendo:

$$T_{Rcd} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta_s = \sqrt{\frac{t \cdot f'_{cd} \cdot s}{A_s \cdot f_{yd}} - 1}$$

Il valore del momento torcente resistente è dato da:

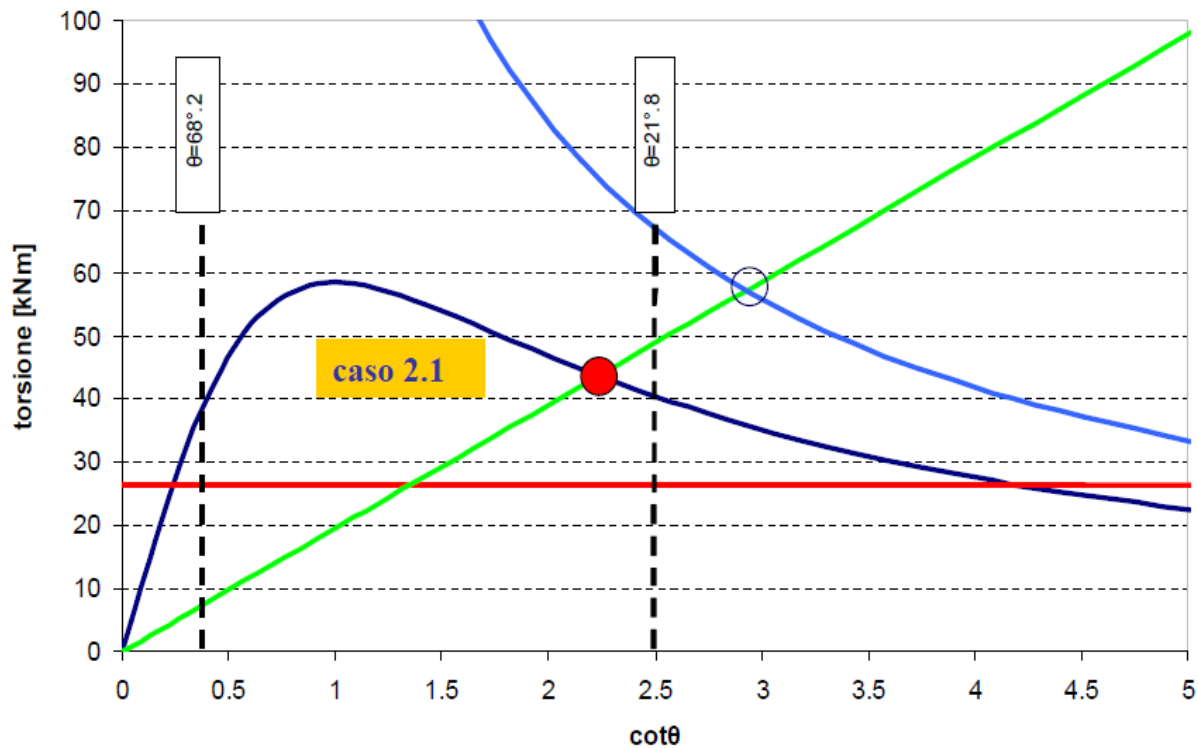
$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot\theta_s / (1 + \cot^2\theta_s)$$

ovvero da:

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot\theta_s$$

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



— T_{red}
— T_{rld}

— T_{sd}
— T_{rsd}

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

Se risulta $\cot \theta = (a_1 / a_s)^{1/2} < \overset{1.0}{\times} 4$ allora nella sezione si attinge la crisi simultanea delle bielle di cls e delle armature longitudinale (CASO 3.1)

Il valore di $\cot \theta$ è determinato ponendo:

$$T_{Rcd} = T_{Rld} \Rightarrow \cot \theta_1 = \sqrt{\frac{\frac{\sum A_1 \cdot f_{yd}}{u_m}}{t \cdot f'_{cd} - \frac{\sum A_1 \cdot f_{yd}}{u_m}}}$$

Il valore del momento torcente resistente è dato da:

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot \theta_1 / (1 + \cot^2 \theta_1)$$

ovvero da:

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_1}{u_m} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot \theta_1}$$

Progetto di travi in c.a. soggette a torsione

VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

